Aufgabe 1. Zeigen Sie folgende Gesetzmässigkeit mittels vollständiger Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

3 Punkte

Aufgabe 2. Skizzieren Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

$$|z + 3i| > |z - 3|.$$

3 Punkte

Aufgabe 3. Untersuchen Sie das Grenzwertverhalten folgender Folgen für $n \to \infty$ und begründen Sie ihre Antwort:

(a)
$$a_n := \frac{(2n+x)^4}{xn^4 - 5n^3 + 6}, \quad \text{für } x = 0 \text{ und } x \neq 0,$$

(b)
$$b_n := \left(\frac{2n}{2n-2}\right)^n,$$

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz und begründen Sie ihre Antwort:

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

(b) Falls diese Reihe konvergiert, geben Sie zusätzlich deren Grenzwert an:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^k}{4^k k!}.$$

1.5+1.5 Punkte

Aufgabe 5. Betrachten Sie die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln\left(\sqrt{3+2x} - x\right).$$

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion f.

(b) Berechnen Sie die Nullstellen und mögliche Kandidaten für Extrema von f.

1.5+2 Punkte

Aufgabe 6. Berechnen Sie die Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4},$$

(b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x+2}}{\sqrt{x}}.$$

2.5+1 Punkte

Aufgabe 7. Gegeben sei folgende Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1 - \sin(x)}{1 + \cos(2x)}.$$

(a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit an den Stellen $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $x_1 = \frac{3\pi}{2}$.
Die Verwendung der Beziehung $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ *könnte hilfreich sein.*

(b) Zeigen Sie, dass f keine Nullstellen besitzt.

2.5+1 Punkte

Aufgabe 8. (a) Berechnen Sie das Taylorpolynom T_3 der Ordnung $n = 3$ von

$$f(x) = e^x \sin(x)$$

um den Punkt $x_0 = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass für den Fehler

$$|f(x) - T_3(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{6}|x^4|, \text{ für } |x| \leq \frac{1}{2}$$

gilt.

2+1 Punkte

Aufgabe 9. Berechnen Sie, falls es existiert, das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty x \sin(2x^2) e^{-x^2} \, dx.$$

2.5 Punkte

Aufgabe 10. (a) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

(b) Sind v_1, v_2 für $a = b = 1$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

1+1 Punkte

Aufgabe 11. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) \\ x_3 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Matrix der Abbildung an und bestimmen Sie deren Rang.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und Bildes der Abbildung.

1+2 Punkte

Aufgabe 12. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \text{span}\{e_1, e_2\} \subset V$ wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist.

(a) Für welchen Vektor v_0 gilt

$$\|v_0 - v_1\|_2 \leq \|v - v_1\|_2, \ \forall v \in U$$

mit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) Wie groß ist die Norm $\|v_0 - v_1\|_2$?

1+0.5 Punkte

Aufgabe 13. Es soll eine Quadraturformel für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

entwickelt werden, die

(i) drei Stützstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$ besitzt,

(ii) drei Gewichte $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ aufweist, wobei $\omega_1 = \omega_3$ sein soll, und

(iii) Polynome möglichst hohen Grades exakt integrieren kann.

(a) Bestimmen Sie den Wert der entsprechenden Gewichte ω_i.

(b) Bestimmen Sie den größten Polynomgrad, bis zu dem die Quadraturformel *alle* Polynome exakt integrieren kann.

1.5+1 Punkte

Aufgabe 14. Gegeben seien die folgenden Messwerte

x_i	-2	-1	1
f_i	-3	2	6

wobei f_i den Funktionswert an der Stützstelle x_i bezeichnet.

(a) Geben Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in der Darstellung durch die Lagrange-Basis-Polynome an, welches f an den Stellen x_0, x_1, x_2 interpoliert.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Aitken-Neville-Schemas den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 0$.

2+2 Punkte

Aufgabe 15. Das folgende Integral soll näherungsweise berechnet werden:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, \mathrm{dx}, \qquad \text{wobei} \quad f(x) = x^2 \cos(\pi x).$$

(a) Benutzen Sie dazu die summierte Trapezregel, wobei das Intervall $[-1, 1]$ in 4 Teilintervalle zerlegt werden soll.

(b) Schätzen Sie, wieviele Stützstellen in der summierten Trapezregel nötig sind, um bei der Berechnung des obigen Integrals einen Fehler $\leq 10^{-3}$ zu erreichen.

1+2 Punkte