Aufgabe 1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4 Punkte

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die Menge $M = \{z \in \mathbb{C} \backslash \{1\} : \ \mathrm{Im}(\frac{z+i}{z-1}) = 0\}$ und skizzieren Sie M in der komplexen Ebene.

3 Punkte

Aufgabe 3. Die Folge u_n sei definiert durch

$$u_0 = 1$$
$$u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

(a) Finden Sie ein $\alpha > 0$, so dass

$$\alpha = \sqrt{1 + \alpha}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie,

$$|u_n| \leq \alpha$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Zeigen Sie, dass u_n monoton wächst.

(d) Begründen Sie, warum (u_n) konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

1+1+1+1 Punkte

Aufgabe 4. Entscheiden Sie ob die Folge

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k}$$

divergiert oder konvergiert. 2 Punkte

Aufgabe 5. Begründen oder widerlegen Sie die Konvergenz der Reihen

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{2k+1}\right)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^{2k}}$.

1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 6. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

(a)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x + 5}{5x^3 + 7x^2 + 8},$$

(b)
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{x^2}.$$

1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 7. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) = \sin(\frac{\pi}{1+x})$.

(a) Zeigen Sie dass f stetig ist.

(b) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass es ein $L > 0$ gibt so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in [0, \infty).$$

(d) Begründen oder widerlegen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(e) Bestimmen Sie die Extremwerte von f. Begründen Sie Ihre Antwort.

(f) Begründen Sie, warum f auf $[0, \infty)$ nicht invertierbar ist.

0,5+0,5+2+0,5+1,5+1 Punkte

Aufgabe 8. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\,e^x$. Berechnen Sie das Taylorpolynom T_n vom Grad $n \in \mathbb{N}$ der Funktion f um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{2}$. Wie groß muss $n \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit der Fehler

$$\|f - T_n\|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |f(x) - T_n(x)|$$

kleiner gleich 0.1 ist?

4 Punkte

Aufgabe 9. Berechnen Sie die Integrale

(a)
$$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$
mittels partieller Integration, und

(b)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{dt}$$
mit Hilfe der Substitution $u = \cos t$.
Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2+3 Punkte

Aufgabe 10. Begründen Sie die Existenz oder Nichtexistenz des folgenden uneigentlichen Integrals:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x \,.$$

3 Punkte

Aufgabe 11. Entscheiden Sie, ob die Vektoren (u, v, w) mit $u = (1, 2, 3, 0)^T$, $v = (-1, 4, 3, 0)^T$ und $w = (0, 0, 0, 1)^T$ linear unabhängig sind.

2 Punkte

Aufgabe 12. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektoren in $\mathbb{R}^3$ und der Teilraum $U = \operatorname{span}\{v_1, v_2\}$. Bestimmen Sie die Bestapproximation von v_3 durch ein Element u^* des Teilraums U.

3 Punkte

Aufgabe 13. Gegeben seien folgende Messwerte

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
y_i	-4	-1	2

(a) Geben Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ zweiten Grades, welches f an den Stellen x_0, x_1, x_2 interpoliert, in der Darstellung durch die Lagrange-Basispolynome an.

(b) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)(-2)$ mit Hilfe des Aitken-Neville-Schemas.

(c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Interpolationsfehler auf dem Intervall $[-1, 1]$ an, unter der Annahme, dass für die n-te Ableitung der zu interpolierenden Funktion f folgendes gilt:

$$\max_{x\in[-1,1]} |f^{(n)}(x)| \leq \frac{n}{2}.$$

2+2+2 Punkte

Aufgabe 14. Zur Auswertung der Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{1+x^4}$$

sei der Algorithmus

$$y_0=x^4,\quad y_1=y_0+1,\quad y_2=\frac{y_0}{y_1},\quad y_3=1-y_2$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Problems für alle $x\in\mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob das Problem gut konditioniert ist und begründen Sie dies.

(b) Ist der angegebene Algorithmus für alle $x\in\mathbb{R}$ stabil? Begründen Sie ihre Antwort und geben Sie ggf. einen stabilen Algorithmus an.

1,5+1,5 Punkte