Aufgabe 1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n}{2}(n+1).$$

3 Punkte

Aufgabe 2. Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl z in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, und bestimmen Sie Betrag und Argument von z:

$$z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\,\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^9.$$

3 Punkte

Aufgabe 3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$

Hinweis: Im Teil (a) dürfen Sie benutzen, dass $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n \leq \dfrac{1}{e}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

4 Punkte

Aufgabe 4. (a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(3n^4+1)}}$$

(b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgende Reihe konvergiert, und berechnen Sie ihren Grenzwert gegebenenfalls.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{3}{2^{n-2}} \right).$$

3 Punkte

Aufgabe 5. Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

3 Punkte

Aufgabe 6. Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sin(\sqrt{x}-1)\,dx.$$

Hinweis: Substitution.

4 Punkte

Aufgabe 7. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zweiten Grades zur Wertetabelle

i	0	1	2
x_i	0	1	2
f_i	0	-1	0

(a) in der Darstellung durch die Lagrange-Basispolynome,

(b) in der Darstellung durch die Monom-Basis,

(c) in der Darstellung durch die Newton-Basis.

3 Punkte

Aufgabe 8. Seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ paarweise verschiedene reelle Zahlen und $f_0, f_1, \ldots, f_n$ beliebige reelle Zahlen.
Zeigen Sie, dass das Polynom p vom Grad $\leq n$, welches die Wertetabelle

i	0	1	$\ldots$	n
x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
f_i	f_0	f_1	$\ldots$	f_n

interpoliert, eindeutig bestimmt ist.

2 Punkte

Aufgabe 9. Zur Auswertung der Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ , \quad f(x) := \sqrt{1+x^2} - x$$

sei der Algorithmus

$$y_0 := x^2 ,\ y_1 := y_0 + 1 ,\ y_2 := \sqrt{y_1} ,\ y_3 := y_2 - x$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die relative Kondition des Problems für alle $x \in \mathbb{R}_+$. Entscheiden Sie, ob das Problem gut konditioniert ist, und begründen Sie dies.

(b) Ist der angegebene Algorithmus für alle $x \in \mathbb{R}_+$ stabil? Begründen Sie Ihre Antwort. Geben Sie gegebenenfalls einen stabilen Algorithmus an.

Hinweis: Erweitern Sie die Funktion geschickt. 3 Punkte