Aufgabe 1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion

$$\sum_{k=n}^{2n} k = 3 \sum_{k=1}^{n} k.$$

3 Punkte

Aufgabe 2. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$(a)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 3n^2 + \sqrt{n}}{(n^2+2)^2 - 1}, \qquad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

4 Punkte

Aufgabe 3. Bearbeiten Sie die Teilaufgaben:

(a) Untersuchen Sie folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n - 2}{3^n}$, wobei $i := \sqrt{-1}$ gilt.

(b) Sei $(a_k) \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ absolut konvergiert.

4 Punkte

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Funktion $f(x) := \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist f auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig?

(c) Ist f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

5 Punkte

Aufgabe 5. Bestimmen Sie das erste uneigentliche Integrale und zeigen Sie beim zweiten, dass es existiert.

$$\int_2^\infty \frac{7}{3t(\ln t)^2}\,dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty e^{-t}\ln t\,dt.$$

Hinweise: Beim zweiten Integral ist es hilfreich, den Integrationsbereich bei $t = 1$ aufzuspalten. Schätzen Sie dann den Integranden auf $[0, 1]$ und $[1, \infty)$ jeweils nach oben geeignet ab. Weiterhin dürfen Sie benutzen: $\lim\limits_{t\to\infty} t^n e^{-t} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

6 Punkte

Aufgabe 6. Betrachten Sie die Auswertung des Ausdruckes

$$y = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x}$$

an der Stelle $x = 10^{-5}$.

a) Welches Phänomen erwarten Sie?

b) Bringen Sie den Ausdruck auf eine numerisch stabilere Form.

c) Berechnen Sie die relative Kondition des Problems.

d) Wie genau (in %) muss x bekann sein, damit sich y auf 1% genau berechnen lässt?

6 Punkte

Aufgabe 7. a) Sei $n \geq 1$, $X := \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_X$ eine Norm auf X. Zeigen Sie, dass

$$\|y\|_Y := \sup_{x \in X : \|x\|_X = 1} x^T y \qquad \text{für alle } y \in Y := \mathbb{R}^n$$

eine Norm auf Y definiert.

b) Zeigen Sie dass für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B).$$

Hinweis: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\kappa(A) = \dfrac{\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|}$.

4 Punkte

Aufgabe 8. Sei $f(x) = 1/x$.

a) Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_2 mit Stützstellen $x_i = i$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

b) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\sup_{x\in[a,3]} |f(x) - p_2(x)|$ für $a = 1$ ab.

*c) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $\sup_{x\in[a,3]} |f(x) - p_2(x)|$ für $a \in (0, 1)$ ab.

Hinweis: Die mit einem * gekennzeichnete Teilaufgabe ist eine Bonusaufgabe.

4+2* Punkte