Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Andrea Hanke
Paul Wilhelm

Applied and Computational Mathematics | RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Analysis für Informatiker | WS 2022/23
Klausur | 23.03.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Ein eigenhändig und beidseitig beschriebenes A4 Blatt, das mit Namen und Matrikelnummer versehen ist.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 04.04.2023 von 10:00–14:00 Uhr im 1090|334, klPhys (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
Punkte	7	6	11	15	10	13	11	10	10	7	100
Ihre Punkte											

Klausur		Bonus		Gesamt
	+		=	

Note:

Aufgabe 1.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)\,(n+1)\,n}{6}.$$

7 Punkte

Aufgabe 2.
Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Zahlen $z \in \mathbb{C}$ für die gilt

a) $|z| \neq 1$

b) $|z| \leq 2 + \operatorname{Im}(z)$

und beschreiben Sie jeweils kurz die Geometrie der Lösungsmenge.

2+4 Punkte

Aufgabe 3.

Sei für die Indizes $n \subset \mathbb{N}$ die Folge $(a_n)_{n=1,\dots} \subset \mathbb{R}$ und Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Geben Sie die allgemeine Definition für die Konvergenz der Folge für $n \to \infty$ an.

(b) Sei dei Folge

$$a_n = \frac{n+2}{n+1}$$

gegeben. Berechnen Sie zunächst den Grenzwert und beweisen Sie dann mit Hilfe der allgemeinen Definition die Konvergenz der Folge.

> **Hinweis:** Schreiben Sie $a_n = a + \tilde{a}_n$ mit dem berechneten Grenzwert a

(c) Der Grenzwert der Folge in (b) soll nun mit einem Fehler $a \pm \Delta a$ von maximal $\Delta a = 0.1$ durch ein Folgenglied $a_{n^\star}$ mit Index $n^\star$ approximiert werden. Was ist der kleinste erlaubte Wert für $n^\star$ mit dem die gewünschte Approximation erreicht wird?

(d) Argumentieren Sie mit der allgemeinen Definition, dass die Folge

$$a_n = 1 + n$$

für $n \to \infty$ nicht konvergiert.

1+5+2+3 Punkte

Aufgabe 4.

Untersuchen Sie folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$,

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$,

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+k}{3k^2+1}\right)^k$,

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-2k}}{e^{-k}}$.

3+4+4+4 Punkte

Aufgabe 5.

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen stetig ergänzbar sind:

a) $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z}$ an der Stelle $z_0 = 0$.

b) $g : \mathbb{R}\backslash\{x_1, x_2\} \longrightarrow \mathbb{R},\ \ g(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$ an den Stellen x_1 und x_2. Bestimmen Sie zunächst x_1 und x_2.

Hinweis: Benutzen Sie im Teil (a) die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion. Denken Sie im Teil (b) an Polynomdivision.

4+6 Punkte

Aufgabe 6.

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \ln(x) + 2 - x.$$

a) Berechnen Sie die Grenzwerte von f für $x \to 0$ und $x \to \infty$.

b) Berechne Sie die Extrema von f.

c) Zeigen Sie, dass f genau zwei Nullstellen besitzt.

5+4+4 Punkte

Aufgabe 7.

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int_0^{\infty} te^{-2t^2} dt$

(b) $\int_{-1}^{1} \frac{3x-2}{x^2-4} dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x) dx$

3+5+3 Punkte

Aufgabe 8.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix D_f (erste Ableitung) von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} (x^2+2y)^3 \\ \exp(x-z) \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie die Funktionsvorschrift der Verknüpfung $h = g \circ f$ mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(s,t) = s + t$ an.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von h im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ in Richtung $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5+1+4 Punkte

Aufgabe 9.

Gesucht ist eine Funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto z = T(x,y)$, welche die Gleichung

$$F\left(x, y, T(x,y)\right) = 1, \qquad \text{mit} \quad F(x,y,z) = \exp(xy) + y^2 \sin(z)$$

erfüllt.

a) Geben Sie mögliche $z \in \mathbb{R}$ an, die $z = T(0,1)$ erfüllen.

b) Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um zu zeigen, dass am Punkt $(x,y,z) = (0,1,0)$ die Funktion $T(x,y)$ existiert.

c) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x T$ und $\partial_y T$ an der Stelle $(x,y) = (0,1)$ für die Funktion aus (b).

2+4+4 Punkte

Aufgabe 10.

Lösen Sie das Anfangswertproblem für die unbekannte Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2\,y}{1+x^3}$$

und der Anfangsbedingung $y(1) = 2$.

7 Punkte