Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Andrea Hanke
Paul Wilhelm

Applied and Computational Mathematics
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Analysis für Informatiker | WS 2022/23
Klausur | 25.02.2023

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Ein eigenhändig und beidseitig beschriebenes A4 Blatt, das mit Namen und Matrikelnummer versehen ist.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 16.03.2023 von 13:00–18:00 Uhr im 1090|334, klPhys (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
Punkte	7	6	9	10	14	14	10	13	10	7	100
Ihre Punkte											

Klausur ____ + Bonus ____ = Gesamt ____

Note: ____

Aufgabe 1.

Zeigen Sie dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

7 Punkte

Aufgabe 2.

Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Zahlen $z \in \mathbb{C}$ für die gilt und beschreiben kurz die Geometrie der Lösungsmenge

a) $|z| \leq 1$

b) $|z| \leq 1 + \mathrm{Re}\,(z)$

2+4 Punkte

Aufgabe 3.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n - \sin(n)}}{\sqrt{n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + \sqrt{n}}{n + 3(n-1)^2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{6n}$

3+2+4 Punkte

Aufgabe 4.

Zeigen Sie: Die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)\ln(k+1)}$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Hinweis: Es kann hilfreich sein, an geeigneter Stelle das *Verdichtungskriterium* zu verwenden:

> Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Dann hat die unendliche Reihe
>
> $$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
>
> das gleiche Konvergenzverhalten wie die verdichtete Reihe
>
> $$T = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k},$$
>
> das heißt, dass die eine Reihe genau dann konvergiert, wenn die andere konvergiert.

10 Punkte

Aufgabe 5.

Sei auf einem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben

(a) Geben Sie die allgemeine ε-δ-Definition für Stetigkeit von f in $x_0 \in [a,b]$ an.

(b) Beweisen Sie mit der ε-δ-Definition die Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \alpha\, x + \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Ist die Funktion gleichmäßig stetig?

(c) Die Funktion in (b) soll in x_0 ausgewertet werden. Die Eingabe x_0 ist mit einem Fehler Δx behaftet und wir möchten f mit einem maximalen Fehler von $\Delta f = 0.1$ auswerten. Was ist die maximal erlaubte Abweichung Δx der Eingabe $x_0 \pm \Delta x$?

(d) Argumentieren Sie mit der ε-δ-Definition, dass die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

bei $x_0 = 0$ nicht stetig ist.

1+5+3+5 Punkte

Aufgabe 6.

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int x^2 sin(x)dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

c) $\int \cos x * \sin^2(x)dx$

5+4+5 Punkte

Aufgabe 7.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x\,\mathsf{e}^y + z \\ \sin(x+y) \\ \frac{z}{y^2+1} \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ (x, y) \mapsto xy^3 + 3$ im Punkt $(2, 1)$ in Richtung $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

6+4 Punkte

Aufgabe 8.

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf (a, b). Zur Berechnung einer Nullstelle $x^\star \in (a, b)$ mit $f(x^\star) = 0$ betrachten wir die Fixpunktgleichung

$$x = \Phi(x), \quad \text{mit} \quad \Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

a) Zeigen Sie, dass ein Fixpunkt von Φ eine Nullstelle $x^\star$ von f ist, falls $f'(x^\star) \neq 0$.

b) Berechnen Sie die Ableitung von Φ und zeigen Sie, dass Φ in der Nähe der Nullstelle eine Kontraktion ist, falls $f'(x^\star) \neq 0$ ist.

c) Welche weitere Voraussetzung müsste gezeigt werden, um die Existenz eines Fixpunktes von Φ mit dem Satz von Banach zu beweisen?

d) Formulieren Sie eine Iterationsvorschrift zur Berechnung von $x^\star$ auf der Basis von Φ unter Voraussetzung dass der Satz von Banach für Φ in der Nähe der Nullstelle gilt. Wählen Sie ein geeignetes $x_1 \neq x^\star$, sodass die Folge gegen $x^\star$ konvergiert.

2+8+2+1 Punkte

Aufgabe 9.

Gesucht ist eine Funktion $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto z = T(x, y)$, welche die Gleichung

$$F\left(x, y, T(x, y)\right) = 0, \qquad \text{mit} \quad F(x, y, z) = x^4 + 2x\cos y + \sin z$$

erfüllt.

a) Geben Sie mögliche $z \in \mathbb{R}$ an, die $z = T(0, 0)$ erfüllen.

b) Benutzen Sie den Satz über implizite Funktionen, um zu zeigen, dass am Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ die Funktion $T(x, y)$ existiert.

c) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_x T$ und $\partial_y T$ an der Stelle $(x, y) = (0, 0)$ für die Funktion aus (b).

2+4+4 Punkte

Aufgabe 10.

Lösen Sie das Anfangswertproblem für die unbekannte Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\,y}{1+x^2}$$

und der Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

7 Punkte