Prof. Dr. Benjamin Stamm
Hassan Muhammad, M. Sc.
Andreas Smolenko, M. Sc.

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Analysis für Informatiker | WS 2017/18
Klausur | 14.03.2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners oder Formelzettel, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 21.03.2018 von 10:15–13:15 Uhr im 1090|334, klPhys (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\sum$
Punkte	4,5	7,5	6,5	6	7	9,5	11	4	4	9,5	7	7	9,5	7	100
Ihre Punkte															

Note:

Aufgabe 1.

Punkte

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Stellen Sie jeden Induktionsschritt ((IA),(IV),(IS)) eindeutig und separiert dar.

4.5 Punkte

Aufgabe 2.

Punkte

a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \qquad \text{und} \qquad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

gelten.

b) Vereinfachen Sie die komplexe Zahl

$$\frac{-1 + 3i}{2 - i},$$

sodass das Resultat aus der Summe eines ohne weiteren Aufwand ablesbaren Realteils und Imaginärteils besteht.

c) Bestimmen Sie die Menge M aller $a = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ für die $\mathrm{Im}(i\bar{a}^2) \geq 0$ gilt und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der komplexen Zahlenebene.

2,5+1+4 Punkte

Aufgabe 3.

Punkte

Zeigen Sie, dass die Folgen

$$x_n = \frac{103n^2 - 8}{4n^2 + 99n - 3} \qquad \text{und} \qquad y_n = -n + \sqrt{n^2 + 3n}$$

mit $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(y_n)_{n\geq 1}$ für $n \to \infty$ konvergieren und berechnen Sie die Grenzwerte $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Begründen Sie Ihre Antwort indem Sie Ihre Zwischenschritte erläutern.

6,5 Punkte

Aufgabe 4.

Punkte

a) Geben Sie die Definition der Konvergenz einer Folge durch das $\varepsilon - N-$Kriterium an.

b) Seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ zwei konvergente reelle Folgen mit den entsprechenden Grenzwerten $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie anhand des $\varepsilon - N-$Kriteriums, dass die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n = \lambda(a_n + b_n)$ für $n \to \infty$ gegen den Grenzwert $\lambda(a + b)$ konvergiert.

2+4 Punkte

Aufgabe 5.

Punkte

a) Sei $q \in \mathbb{R}^*$ mit $q \neq 1$ gegeben. Zeigen Sie durch vollständige Indukion, dass die Folge der reellen Partialsummen $(s_n)_{n\geq 0}$ mit

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

durch

$$s_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

dargestellt werden kann.

b) Beweisen Sie das Resultat der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad 0 < |q| < 1$$

unter Verwendung des Resultats des vorherigen Aufgabenteils.

Hinweis: Sie dürfen nicht das Resultat der geometrischen Reihe vom Formelblatt verwenden. Die Aussage soll beweisen werden.

5+2 Punkte

Aufgabe 6.

Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+2k}{2^k}$$
konvergiert.

b) Geben Sie an und begründen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
konvergiert.

5,5+4 Punkte

Aufgabe 7.

Punkte

Seien $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+^*$ mit $f(x) = \frac{1}{|x|}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = (x-1)(x+1)$ gegeben.

i) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Begründen Sie eindeutig und mathematisch fundiert Ihre Antwort!

ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \infty$ gilt. Sie dürfen annehmen, dass $x_0 = 0$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{R}^*$ ist.

iii) Zeigen Sie unter Verwendung des ε-δ-Kriteriums die Stetigkeit von g im Punkt $x_0 = 0$.

3+4+4 Punkte

Aufgabe 8.

Punkte

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2\pi x^2)}{\cos(2\pi x^3)}.$$

Erläutern Sie jeden Schritt.

4 Punkte

Aufgabe 9.

Punkte

Zeigen Sie, dass es genau ein $\hat{x} \in \mathbb{R}_+$ gibt, sodass

$$\hat{x} = \cos(\hat{x})$$

gilt.

4 Punkte

Aufgabe 10.

Punkte

Gegeben sei die stetige und differenzierbare Funktion $f : [-10, 10] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2\pi x - \sin(2\pi x).$$

Sie dürfen annehmen, dass die erste Ableitung dieser Funktion $f' : [-10, 10] \to \mathbb{R}$ auch auf dem Definitionsbereich differenzierbar ist.

i) Bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung von f. Bestimmen Sie alle potentiellen Kandidaten für lokale Extrema.

ii) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maximal- und Minimalstellen und alle lokalen und globalen Maxima und Minima. Gebem Sie explizit an, an welchen Stellen es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

3,5+6 Punkte

Aufgabe 11.

Punkte

a) Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 t \exp(-t^2) dt.$$

Nutzen Sie Integrationsregeln, um die Stammfunktion zu bestimmen. Sie müssen nicht überprüfen, dass der Integrand integrierbar ist.

b) Untersuchen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende uneigentliche Integral existiert

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(1+x)^\alpha} dx$$

und berechnen Sie gegebenenfalls den Wert dieses Integrals.

3+4 Punkte

Aufgabe 12.

Punkte

a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \cdot \cos(x) + \ln(z^2+1) \\ \sin(y^2+3x) \cdot z \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung im Punkt $(0,0,0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $g(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$. Geben Sie die Funktionsvorschrift der Verkettung $h = f \circ g$ an.

c) Bestimmen Sie die Jakobi-Matrix Dh von h.

4+1+2 Punkte

Aufgabe 13.

Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung für (x, y) gegeben durch

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$$

im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 3)$ lokal nach y aufgelöst werden kann. Erklären Sie, was das bedeutet.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix (erste Ableitung) der lokalen Lösung im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 3)$.

c) Finden Sie die explizite Formel der impliziten Funktion und überprüfen Sie Aufgabenteil b).

4,0+2+3,5 Punkte

Aufgabe 14.

Punkte

Sei die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}(x) = -x^2 \cdot y(x)^2$$

unter der Anfangsbedingung $x_0 = 0$ und $y(x_0 = 0) = 2$ gegeben. Bestimmen Sie die Lösung φ dieses Anfangswertproblems mit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^*$ und $\varphi(0) = 2$.

7 Punkte

Name: Matrikel-Nr.: