

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Klausur | 23.03.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners oder Formelzettel, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 06.04.2016 von 10:00 – 12:00 Uhr im 1090|334, KIPhys (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanks-Blätter.*
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: _ _ _ _ _

Name, Vorname: _____

Unterschrift: _____

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
Punkte	5	4,5	4	5,5	3	6,5	8,5	4	5	4	50
Ihre Punkte											

Note:

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Klausur am 23.03.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,

$$"31 \text{ ist ein Teiler von } 5^{n+1} + 6^{2n-1}."$$

5 Punkte

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie jeweils den Betrag, Real- und Imaginärteil und die komplex Konjugierte von

(a) $z_1 = \frac{-4 + 8i}{i - 3}$

(b) $z_2 = \frac{i(2i + 2)}{5 + i}$

(c) $z_3 = (i + 2)^4$

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 3.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi n^2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{n} + 3n^2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n - 2\sqrt{n}} - \sqrt{n}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n+2}$

1+2+1 Punkte

Aufgabe 4.

Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1} + (2i)^k}{5^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}}$

(c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1}$

2,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + x \sin(x)}{(e^x - 1)^2}$$

- a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ von f an. Begründen Sie Ihre Antwort!

Name :

Matrikel-Nr. :

- b) Prüfen Sie f auf stetige Fortsetzbarkeit im Punkt $x_0 = 0$ und geben Sie gegebenenfalls eine stetige Fortsetzung von f an.

0,5+2,5 Punkte**Aufgabe 6.**Gegeben sei die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x) = (1 + 2x)e^{-x^2}$$

- (a) Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$ und zeigen Sie, dass die zweite Ableitung $f''(x)$ gegeben ist durch

$$f''(x) = 2e^{-x^2} (4x^3 + 2x^2 - 6x - 1).$$

- (b) Berechnen Sie alle Extremstellen und bestimmen Sie, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.
- (c) Ist f in $x = 0$ konvex oder konkav? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f in $x_0 = 0$.

2+2+1+1,5 Punkte**Aufgabe 7.**

Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\int_0^{\infty} te^{-2t^2} dt$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{3x-2}{x^2-4} dx$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(2x) dx$

3+3,5+2 Punkte**Aufgabe 8.**

a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x e^y + z \\ \sin(x+y) \\ \frac{z}{y^2+1} \end{pmatrix}$

- b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto xy^3 + 3$ im Punkt $(2, 1)$ in Richtung $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2+2 Punkte**Aufgabe 9.**

- (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\exp(xy) + y^2 \sin(z) = 1$$

in der Nähe der Lösung $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ eindeutig nach $z(x, y)$ aufgelöst werden kann.

- (b) Bestimmen Sie die Ableitung

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1).$$

3,5 + 1,5 Punkte**Aufgabe 10.**

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + 2y = x$$

mit $y(0) = 1$ ($x \geq 0$).

4 Punkte