Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Klausur | 18.02.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Weitere Hilfsmittel, insbesondere die Nutzung eines Taschenrechners oder Formelzettel, sind nicht erlaubt.

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen*.
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 29.02.2016 von 11:30–13:30 Uhr im 1090|334, klPhys (3. Stock) des Rogowski Gebäudes, Schinkelstr. 2 statt. Termine zur mündlichen Ergänzungsprüfung sind während der Klausureinsicht zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt“ an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter*.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

Matrikelnummer: ___ ___ ___ ___ ___ ___

Name, Vorname: ____________________

Unterschrift: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$
Punkte	4	4,5	4,5	4,5	3	7	8,5	4	6	4	50
Ihre Punkte											

Note:

Prof. Dr. Manuel Torrilhon
Julian Köllermeier
Armin Westerkamp

Analysis für Informatiker | WS 2015/16
Klausur am 18.02.2016 | Übersicht Klausuraufgaben

Aufgabe 1.

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

4 Punkte

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ für die gilt

$$|1+iz|^2 < 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z-i) > 0$$

und skizzieren Sie die Lösungsmenge in der komplexen Ebene.

4,5 Punkte

Aufgabe 3.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n - \sin n}}{\sqrt{n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 + \sqrt{n}}{n + 3(n-1)^2}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^{6n}$

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 4.

Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^k}$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k+1}{2^k}$

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k+1}$

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 5.

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \sin(2x)}{e^x - 1}$$

a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ von f an. Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Prüfen Sie f auf stetige Fortsetzbarkeit im Punkt $x_0 = 0$ und geben Sie gegebenenfalls eine stetige Fortsetzung von f an.

Name: Matrikel-Nr.:

0,5+2,5 Punkte

Aufgabe 6.
Gegeben sei die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \cos\left(\pi x e^{2x}\right)$$

(a) Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung $f'(x)$ und $f''(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass f in $x = -\frac{1}{2}$ ein Extremum hat.

(c) Ist f in $x = 0$ konvex oder konkav? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f in $x_0 = 0$.

2,5+1,5+1+2 Punkte

Aufgabe 7.
Berechnen Sie folgende Integrale

(a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x}(\ln x)^{-2}dx$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 \sin(\pi x)dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 te^{-2t}dt$

3+3+2,5 Punkte

Aufgabe 8.
a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{x+2z} \\ z\,\mathrm{e}^{-y} \end{pmatrix}$

b) Geben Sie die Funktionsvorschrift der Verknüpfung $h = g \circ f$ mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (s, t) \mapsto s + t$ an.

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung von h im Punkt $(0, 0, 0)$ in Richtung $v = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1,5+0,5+2 Punkte

Aufgabe 9.
a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Banach, dass für $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ein Fixpunkt x^* mit $\varphi(x^*) = x^*$ im Intervall $[0, 1]$ existiert.

b) Geben Sie eine geeignete Iterationsvorschrift an.

5,5+0,5 Punkte

Aufgabe 10.
Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = x\,y + \frac{x}{y}$$

mit $y(0) = 1\ \ (x \geq 0)$.

4 Punkte