Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Matr.-Nr.: | | | | | | |

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK (CCES)

Klausur Analysis für Informatiker

19.03.2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- Dokumentenechtes Schreibgerät, aber kein Rotstift.
- Weitere Hilfsmittel (Formelsammlung, Formelblätter, Taschenrechner, Mobiltelefone, Laptops etc.) sind **nicht** zugelassen

Hinweise:

- Das Mitführen von Mobilfunkgeräten während der Klausur gilt als Täuschungsversuch.
- Sie haben insgesamt **120 Minuten** Zeit zur Bearbeitung. *Alle Antworten sind ausführlich zu begründen.*
- Zum Bestehen der Klausur reichen **50%** der möglichen Punkte.
- Die Klausureinsicht findet am 03.04.2014 von 10:00–13:00 Uhr im Raum 1090|334, klPhy, Rogowski Gebäude, Schinkelstr. 2 statt. Ein Termin für eine mündliche Nachprüfung ist dort zu vereinbaren.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf dem Blatt, auf dem die Aufgabenstellung formuliert ist. Sollten Sie außer der gegenüber befindlichen Leerseite noch eines der angehefteten Leerblätter benutzen, so geben Sie bitte auf dem ersten Blatt den Hinweis „Fortsetzung auf einem anderen Blatt" an. *Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer – auch die benutzten Blanko-Blätter.*
- Bei Rücktritt von der Klausur *vor* Beginn der Klausur ist ein Attest notwendig. Bei Rücktritt *nach* Beginn der Klausur ist unverzüglich eine Ärztin oder ein Arzt aufzusuchen. Auf dem Attest müssen Befundtatsachen, Datum und genaue Uhrzeit aufgeführt werden. Das Attest ist unverzüglich beim zentralen Prüfungsamt (ZPA) einzureichen. Nach Weiterleitung an den zuständigen Prüfungsausschuss entscheidet dieser über die Anerkennung.
- Durch Ihre Unterschrift versichern Sie, dass Sie zu Beginn der Klausur nach bestem Wissen prüfungsfähig sind und dass die Prüfungsleistung von Ihnen ohne nicht zugelassene Hilfsmittel erbracht wurde.

NAME, VORNAME: ______________________________

Unterschrift: ______________________________

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
Punkte	4	4,5	4,5	3	4,5	6	2,5	4	6	39
Ihre Punkte										

Note:

Klausur Analysis für Informatiker

19.03.2014

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

4 Punkte

Aufgabe 2.

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{9n^3}{3n^2-1} - \dfrac{3n(n+1)}{n+2}$

(b) $a_n = n^2\left(\sqrt{n^5+4} - \sqrt{n^5+3}\right)$

(c) $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}\right)^n$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$.

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right)^k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{1+q^k}$ für ein festes $0 < q < 1$

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $f: \ D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - 2\frac{\sin(x)}{x}.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an und untersuchen Sie f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken.

3 Punkte

Aufgabe 5.

Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \mathrm{e}^{2-4x^4+2x^2}$$

auf lokale und globale Extrema und bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von g um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

4,5 Punkte

Aufgabe 6.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int_1^2 x^2(1-\ln(x))dx, \qquad \text{(b)} \int_{-2}^{-1} \frac{x^2+5}{x^3+3x}dx, \qquad \text{(c)} \int_2^{\infty} \frac{10x}{(5+x^2)^2}dx.$$

2+2+2 Punkte

Aufgabe 7.

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(a,b) = a^2b - b^3a + 1$$

im Punkt $(a_1, b_1) = (1,2)$ in Richtung des Vektors

$$v = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2,5 Punkte

Aufgabe 8.

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber die Ableitungen nach x und y nicht vertauschen.

Ist $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ in $(0,0)$ stetig ?

4 Punkte

Aufgabe 9.

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \frac{1}{90}(1+x)e^{x^3+1} + \frac{1}{2}$$

genau eine Lösung im Intervall $[-1,1]$ besitzt.

6 Punkte

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k!} = \frac{n!-1}{n!}$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.

4 Punkte

Aufgabe 2.

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{9n^3}{3n^2-1} - \dfrac{3n(n+1)}{n+2}$

(b) $a_n = n^2\left(\sqrt{n^5+4} - \sqrt{n^5+3}\right)$

(c) $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}\right)^n$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$.

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 3.
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k}\right)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{1+q^k}$ für ein festes $0 < q < 1$

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $f:\ D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - 2\frac{\sin(x)}{x}.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an und untersuchen Sie f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken.

3 Punkte

Aufgabe 5.

Untersuchen Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \mathrm{e}^{2-4x^4+2x^2}$$

auf lokale und globale Extrema und bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von g um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

4,5 Punkte

Aufgabe 6.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^2(1-\ln(x))dx$, (b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x^2+5}{x^3+3x}dx$, (c) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{10x}{(5+x^2)^2}dx$.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 7.

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(a,b) = a^2b - b^3a + 1$$

im Punkt $(a_1, b_1) = (1, 2)$ in Richtung des Vektors

$$v = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2,5 Punkte

Aufgabe 8.

Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in $(0,0)$ zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber die Ableitungen nach x und y nicht vertauschen.

Ist $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ in $(0,0)$ stetig ?

4 Punkte

Aufgabe 9.

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \frac{1}{90}(1+x)e^{x^3+1} + \frac{1}{2}$$

genau eine Lösung im Intervall $[-1, 1]$ besitzt.

6 Punkte