Klausur Analysis für Informatiker

13.02.2014

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1}(k-1)(k+1) = 2n^2 - n - 1$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

4 Punkte

Aufgabe 2.

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

(b) $a_n = \dfrac{2n(n+4)}{n+1} - \dfrac{4n^3}{2n^2-1}$

(c) $a_n = \left(\dfrac{q}{q+1}\right)^n \dfrac{n^3+4}{3+3n^3}$ für $q > 0$.

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7k-2}{8k-3\sqrt{k}}\right)^k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+3}{2^{k+1}k}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\cos x + 3x - 1}{2x}.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an und untersuchen Sie f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken.

3 Punkte

Aufgabe 5.

Es sei $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sqrt{x}\log(x-1).$$

(a) Ist f differenzierbar auf dem Intervall $(2,4)$?

(b) Untersuchen Sie f auf Monotonie beziehungsweise strenge Monotonie.

(c) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen von f.

(d) Geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

1+1+1+2 Punkte

Aufgabe 6.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{16x-16}{x^2-4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{1-\sin(x)}\,dx.$

Entscheiden Sie jeweils zuerst, ob es sich um ein bestimmtes oder ein uneigentliches Integral handelt.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y,z) = x^3 + e^y \sin z$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, \log 3, \frac{\pi}{2})$ in Richtung des Vektors $r = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3 Punkte

Aufgabe 8.

Begründen Sie, warum die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y + e^z \\ x^2 \sin y + z \end{pmatrix}$$

auf ganz $\mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist und geben Sie die totale Ableitung im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, \frac{\pi}{2}, 0)$ an.

3 Punkte

Aufgabe 9.

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \frac{1}{4} e^{1-\frac{x}{2}}$$

genau eine Lösung im Intervall $[0, 1]$ besitzt.

6 Punkte