Aufgabenübersicht

Aufgabe 1 Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$31 \text{ ist ein Teiler von } \; 5^{n+1} + 6^{2n-1}.$$

Aufgabe 2 Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \; \mathrm{Im}\left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - 2} \right) = 0 \right\}$$

in der komplexen Ebene.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{\pi n^2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{n} + 3n^2}$, (b) $b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) Falls diese Reihe konvergiert, geben Sie zusätzlich den Grenzwert an:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!},$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{2k} \right)^k.$$

Aufgabe 5 Sei $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}.$$

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an.

(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken und geben Sie eine stetige Fortsetzung sowie deren Definitionsbereich an.

Aufgabe 6 Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1+x}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f und berechnen Sie die erste und zweite Ableitung.

(b) Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 1$ eine Extremstelle besitzt. Handelt es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum?

(c) Ist die Funktion f im Punkt $x_1 = 0$ konvex oder konkav?

(d) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung T_2 von f der Ordnung 2 um den Punkt $x_2 = 2$.
Hinweis: Sie dürfen $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ verwenden.

Aufgabe 7 Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \sqrt{x}\, \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \ln x\, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 8 Es seien $f : D_f \to \mathbb{R}^2$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subset D_g$ sowie $h : D_f \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} \ln(s+t^2) \\ s\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2, \qquad h = g \circ f.$$

(a) Bestimmen Sie für alle $(s,t) \in D_f$ die Ableitung $Dh(s,t)$ von h mit Hilfe der Kettenregel.

(b) Berechnen Sie $Dh(1,0)$.

Aufgabe 9 Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin(y+2x)$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x,y) = 0$ bei $(x,y) = (0,0)$ lokal nach y auflösbar ist, d.h. zeigen Sie die Existenz einer Funktion g mit $g(0) = 0$ und $f(x, g(x)) = 0$.

(b) Berechnen Sie $g'(0)$.

Aufgabe 10 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 2y = x$$

für $y(x)$ mit $y(0) = 1$.

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ________________

Aufgabe 1. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$31 \text{ ist ein Teiler von } \quad 5^{n+1} + 6^{2n-1}.$$

4 Punkte

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

Aufgabe 2. Skizzieren Sie die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \; \mathrm{Im}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-2}\right) = 0 \right\}$$

in der komplexen Ebene.

3,5 Punkte

Name: ________________________ **Matr.-Nr.:** ________________

Aufgabe 3. Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert.

(a) $a_n = \dfrac{\pi n^2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{n} + 3n^2}$, (b) $b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$.

1 + 2 Punkte

Name: ________________________ **Matr.-Nr.:** ____________

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) Falls diese Reihe konvergiert, geben Sie zusätzlich den Grenzwert an:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!},$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{2k} \right)^k .$$

2 + 2 Punkte

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ____________

Aufgabe 5. Sei $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x}.$$

(a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an.

(b) Untersuchen Sie die Funktion f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken und geben Sie eine stetige Fortsetzung sowie deren Definitionsbereich an.

0,5 + 6,5 Punkte

Name: ____________________ **Matr.-Nr.:** ____________

Aufgabe 6. Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1+x}\right)$.

(a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D von f und berechnen Sie die erste und zweite Ableitung.

(b) Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 1$ eine Extremstelle besitzt. Handelt es sich um ein lokales Minimum oder ein lokales Maximum?

(c) Ist die Funktion f im Punkt $x_1 = 0$ konvex oder konkav?

(d) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung T_2 von f der Ordnung 2 um den Punkt $x_2 = 2$.
Hinweis: Sie dürfen $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ verwenden.

2,5 + 2,5 + 1,5 + 2,5 Punkte

Name: ____________________ **Matr.-Nr.:** ____________

Aufgabe 7. Berechnen Sie die Integrale

$$\text{(a)} \quad \int_0^1 \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx, \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^1 \ln x\, dx.$$

4,5 + 2,5 Punkte

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

Aufgabe 8. Es seien $f : D_f \to \mathbb{R}^2$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ mit $f(D_f) \subset D_g$ sowie $h : D_f \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} \ln(s+t^2) \\ se^{2t} \end{pmatrix}, \qquad g(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2, \qquad h = g \circ f.$$

(a) Bestimmen Sie für alle $(s,t) \in D_f$ die Ableitung $Dh(s,t)$ von h mit Hilfe der Kettenregel.

(b) Berechnen Sie $Dh(1,0)$.

4 + 0,5 Punkte

Name: ______________________ **Matr.-Nr.:** ______________

Aufgabe 9. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin(y + 2x)$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x,y) = 0$ bei $(x,y) = (0,0)$ lokal nach y auflösbar ist, d.h. zeigen Sie die Existenz einer Funktion g mit $g(0) = 0$ und $f(x, g(x)) = 0$.

(b) Berechnen Sie $g'(0)$.

2 + 2 Punkte

Name: ______________________________ **Matr.-Nr.:** ____________________

Aufgabe 10. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 2y = x$$

für $y(x)$ mit $y(0) = 1$.

4 Punkte
